

Prueba de oposición: Problema 2

Aquiles Carattino

21 de Noviembre de 2006

1. Resolución

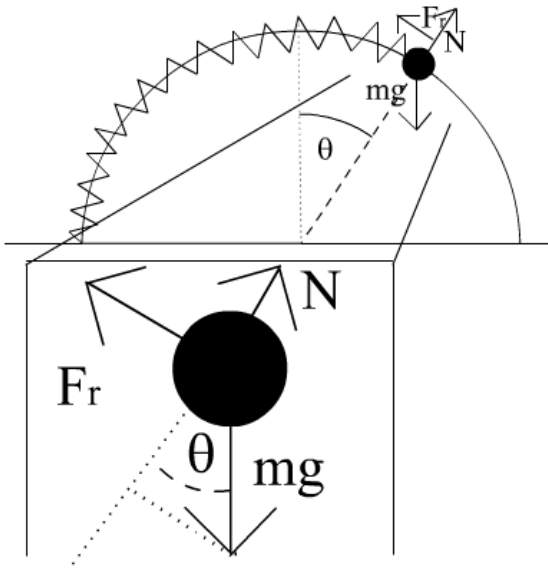


Figura 1: Esquema del problema y diagrama de cuerpo libre.

Lo importante en este problema es plantear un sistema de coordenadas que simplifique las cuentas. Se tomará el ángulo de polares θ propuesto en el enunciado. Se debe recordar la expresión de la aceleración en polares, teniendo en cuenta que $\dot{r} = 0$.

1.1. Parte A

Para encontrar la ecuación de movimiento, se debe plantear el diagrama de cuerpo libre, obtener el valor de la fuerza para cada posición de la partícula y expresar la ecuación diferencial. Como se observa en

la Figura 1 la fuerza que ejerce el resorte será siempre paralela al movimiento de la masa (tangente a la circunferencia) mientras que la fuerza de gravedad puede ser expresada en 2 componentes, una tangente a la circunferencia y una normal. La componente normal se anulará con la fuerza de vínculo del aro, por lo que no importará, la componente tangente viene dada por:

$$F_g = mg \sin(\theta) \quad (1)$$

Por el otro lado, la fuerza del resorte viene dada como el apartamiento de la posición de equilibrio (en este caso $\theta = 0$) multiplicado por la constante del resorte, es decir queda:

$$F_r = -k R \theta \quad (2)$$

Tanto en 1 como en 2 se puede ver que los signos están bien elegidos, al aumentar θ la componente tangente de la gravedad aumenta, mientras que la del resorte aumenta en módulo, pero con sentido contrario y viceversa: al disminuir θ , etc.

Entonces, de plantear las ecuaciones de Newton, queda:

$$m R \ddot{\theta} = F_g + F_r = m g \sin(\theta) - k R \theta \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{m R} (m g \sin(\theta) - k R \theta) \quad (4)$$

Esta es una ecuación similar a la del péndulo invertido pero con un factor lineal en la posición sumando. Esta ecuación no tiene una solución analítica completa (como tampoco lo tiene el péndulo) por lo que en los siguientes puntos nos centraremos en cómo resolverla mediante aproximaciones.

1.2. Parte B

Para poder resolver la ecuación 4 aproximando algunos términos, es necesario conocer cuáles son las posiciones de equilibrio estable. Para ello primero se busca en qué lugares la fuerza se anula (la condición necesaria para encontrar un equilibrio) y luego se ve que la derivada de la fuerza debe negativa (es decir se tiene una fuerza restitutiva) para que el equilibrio sea estable.

Las dos fuerzas presentes (del resorte y de gravedad) quedan como:

$$F_{\text{tot}} = -k R \theta + m g \sin(\theta) \quad (5)$$

Hay que observar que por la forma en la que se tomaron las coordenadas, no aparece el l_0 del resorte en la ecuación. Igualando a 0 se obtiene:

$$\frac{k R}{m g} \theta = \sin(\theta) \quad (6)$$

Esta es una ecuación trascendente, que salvo en contados casos no se puede resolver analíticamente (no se puede hallar un valor exacto para el ángulo.) En la Figura 2 se representan las dos partes de la ecuación (el seno y la recta.) Gráficamente se pueden observar condiciones para la existencia de puntos en los que la fuerza se anula. Primero, $\theta = 0$ siempre será un equilibrio (siempre cumple con la ecuación 6); además, como el movimiento está limitado entre $\pi/2$ y $-\pi/2$, la pendiente de la recta debe ser mayor que

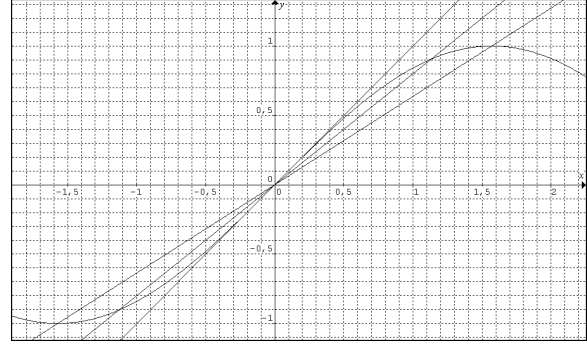


Figura 2: Intersección entre una recta y el seno. Se graficaron los dos casos límite de pendiente y uno intermedio.

$2/\pi$ pero menor que 1. Es decir, que para tener más de una posición de equilibrio se deben cumplir las siguientes condiciones simultáneamente:

$$\frac{k R}{m g} > \frac{2}{\pi} \quad (7)$$

$$\frac{k R}{m g} < 1 \quad (8)$$

Es útil para el punto siguiente introducir el potencial. Definiéndolo como $F = -dV/d\theta$, obtenemos mediante una simple integración:

$$V = m g \cos(\theta) + \frac{1}{2} k R \theta^2 \quad (9)$$

Las condiciones ahora, para equilibrios es que la derivada del potencial sea 0 (un punto crítico) y para que sea estable que sea mayor que 0 (un mínimo de potencial¹.) Derivando, se recuperan las condiciones 7 y 8.

1.3. Parte C

Ahora analizaremos la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio. Realizando la derivada de

¹Al contrario que con la fuerza, esto se debe al cambio de signo en la definición de potencial

la fuerza (o la derivada segunda del potencial):

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{d^2V}{d\theta^2} = -kR + mg \cos(\theta) \quad (10)$$

Para que un equilibrio sea estable, se había dicho que la derivada de la fuerza debe ser negativa; para la primer posición de equilibrio $\theta = 0$ (reemplazando en 10) se obtiene la siguiente condición para que se trate de un equilibrio estable:

$$\frac{kR}{mg} > 1 \Rightarrow \frac{k}{m} > \frac{g}{R} \quad (11)$$

Esta ecuación es claramente lo opuesto a lo encontrado en 8. Es decir que para que $\theta = 0$ sea una posición de equilibrio estable, debe ser la única posición de equilibrio.

Analizando el segundo caso, donde se presentan otros puntos de equilibrio distintos del 0, se tiene que estos deben ser necesariamente equilibrios estables: resulta mucho más simple y claro explicar este punto con el potencial y no con la fuerza; el potencial presenta un máximo para $\theta = 0$ pero tiende a infinito cuando $\theta \rightarrow \pm\infty$ y como se trata de una función continua, debe presentar algún mínimo entre el 0 y cualquier valor “grande”; como la derivada primera se anula sólo 1 vez dentro del intervalo $(0; \pi/2]$ (ó $[-\pi/2; 0)$), en ambos casos se debe tratar de de un mínimo, es decir las otras dos posiciones de equilibrio distintas de $\theta = 0$ son estables.

Una vez hecha la discusión analítica del problema, es útil mostrar gráficamente la apariencia del potencial para distintos coeficientes. Esto se observa en la Figura 3. Se presenta un caso donde el 0 es un equilibrio estable y otro en el que es un equilibrio inestable, pero aparecen otros dos estables (este caso se resolverá numéricamente en la parte E.)

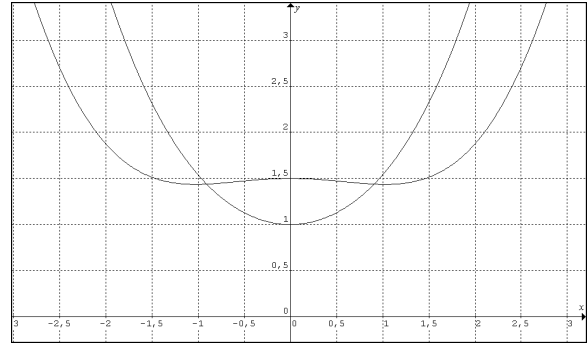


Figura 3: Formas del potencial para diferentes valores de los parámetros involucrados.

1.4. Parte D

Dado que el único equilibrio del que se tiene el valor exacto es el 0, se desarrollará la fuerza alrededor de este punto, y luego se resolverá la ecuación diferencial teniendo en cuenta la condición 11.

Se desarrolla la fuerza a primer orden (equivalentemente se puede decir que se desarrolla el potencial a segundo orden):

$$F(\theta) \approx F(0) + \frac{dF}{d\theta}\theta \quad (12)$$

Como estamos en una posición de equilibrio, el término independiente ($F(0)$) desaparece. Es decir, que la fuerza queda como:

$$F(\theta) \approx (-kR + mg)\theta \quad (13)$$

Esta fuerza es igual a la de un resorte, proporcional al apartamiento del equilibrio, sólo que la “constante” de elasticidad ahora es $-kR + mg$ (como se cumple la condición 11, este término es negativo, de la misma forma que sucedería para un resorte.) Suponiendo que los alumnos ya resolvieron el problema del oscilador armónico en el que se tenía:

$$\ddot{x} + \frac{k'}{m}x = 0 \quad (14)$$

Se puede mostrar que las soluciones serán de la forma:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (15)$$

En donde (recordando la ecuación 4 en la que aparece un factor $1/Rm$ y no solamente $1/m$):

$$\omega = \sqrt{\frac{kR - mg}{Rm}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{R}} \quad (16)$$

Hay que destacar en ω aparece tanto el término debido al resorte (k/m) como el debido al péndulo invertido (g/R). Por la condición 11, la frecuencia ω será siempre real. A y φ son dos constantes que dependen de las condiciones iniciales ($\theta(0)$ y $\dot{\theta}(0)$).

Podría llegar a ser útil (dependiendo de cuánto se hubiera ejercitado hasta el momento) mostrar alguna técnica de resolución de ecuaciones diferenciales. Ya sea utilizando exponenciales complejas o con senos y cosenos.

Es interesante plantear también qué pasaría en el caso en el que la masa no estuviera enhebrada al alambre, sino apoyada sobre la superficie, estudiar si en algún momento dejaría de estar en contacto. Para ello basta ver si en algún momento la componente perpendicular a la superficie del peso es menor que la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular:

$$m\omega^2 R > mg \cos(\theta) \quad (17)$$

En la resolución numérica también se puede incluir esta situación, analizándolo en cualquier caso, no sólo en pequeños apartamientos del equilibrio.

1.5. Parte E

Es útil para la resolución numérica de un problema la presentación de diferentes herramientas, como lenguajes de programación (y sus respectivos méto-

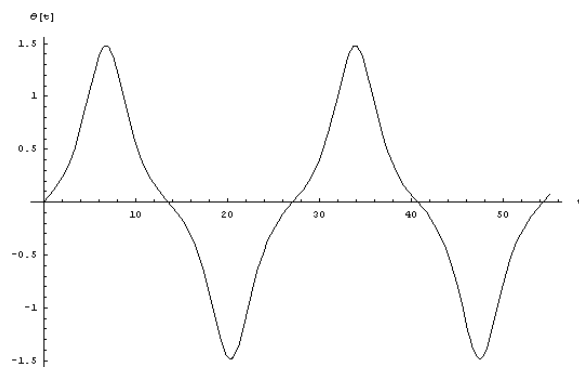


Figura 4: Resolución numérica alrededor de un equilibrio inestable con velocidad inicial.

dos numéricos) o programas como el Mathematica. Por la simplicidad del problema no se observarán grandes diferencias entre cualquiera de las elecciones, pero resolverlo con el Mathematica será sensiblemente más sencillo. Para ello se utiliza la función “NDSolve” y luego se grafican los resultados, como se observa en la Figura 4. Se eligió resolver el problema para el caso de un equilibrio inestable en $\theta = 0$ partiendo de esa posición y con velocidad distinta de 0.

En cuanto a los lenguajes de programación, aplicar el método de Euler es quizás el camino más claro y fácil de realizar, y para este problema en particular no debería presentar inconvenientes. Es posible usar casi cualquier lenguaje, desde Basic, C o C++, hasta lenguajes usados para la programación Web como Java, Perl e inclusive ASP o PHP (este último en particular tiene la ventaja de un tratamiento más ligero con las variables, evitando problemas por errores en las declaraciones.)

El método de Runge-Kutta (RK4) elimina errores de órdenes superiores, pero generalmente resulta más difícil de programar (especialmente al momento de inicializar los parámetros correctamente) y quizás se desvía un poco la atención sólo hacia las dificultades computacionales en vez de hacia el verdadero problema a resolver.